数理解析研究所講究録 1230 巻 2001 年 108-112

非可換 L^p 空間の構造

東京大学大学院数理科学研究科
泉 英明 (Izumi Hideaki)
Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo

フォン・ノイマン環 $\mathcal{M}$ およびその上の weight φ に対して、複素補間法を用いて構成される L^p 空間 $L^p_{(\alpha)}(\varphi)$ において conjugate-linear involution $J_{p,(\alpha)}$ および positive cone $\mathcal{P}_{p,(\alpha)}$ を定義し、positive cone の duality を示す。

まず、非可換 L^p 空間の構成および基本的性質について概説する (詳しくは [1],[2] を参照)。

実数 α に対して集合 $L_{(\alpha)}$ を

$$L_{(\alpha)}=\left\{x\in\mathcal{M}\ \middle|\ \begin{array}{l}\text{unique に } \varphi_x^{(\alpha)}\in\mathcal{M}_* \text{ が存在して、}\\ \varphi_x^{(\alpha)}(y^*z)=(\pi_\varphi(x)J_\varphi\Delta_\varphi^{\overline{\alpha}}\Lambda_\varphi(y)|J_\varphi\Delta_\varphi^{-\alpha}\Lambda_\varphi(z))\\ \text{が任意の } y,z\in\mathfrak{a}_0 \text{ に対して成立する。}\end{array}\right\}$$

で定義する。$L_{(\alpha)}$ はノルム

$$\|x\|_{L_{(\alpha)}}=\max\{\|x\|,\|\varphi_x^{(\alpha)}\|\}$$

でバナッハ空間になる。埋め込み

$$j^*_{(-\alpha)}:\mathcal{M}\to L^*_{(-\alpha)},$$
$$i^*_{(-\alpha)}:\mathcal{M}_*\to L^*_{(-\alpha)}$$

を等式

$$(1)\qquad j^*_{(-\alpha)}(x)=i^*_{(-\alpha)}(\varphi_x^{(\alpha)}),\ x\in L_{(\alpha)}$$

を満たすように構成できる。すると、空間

$$\Sigma_{(\alpha)} = j^*_{(-\alpha)}(\mathcal{M}) + i^*_{(-\alpha)}(\mathcal{M}_*)$$

は $\mathcal{M}$ と $\mathcal{M}_*$ を同一視のルール (1) によって融合した空間になる。Calderón の複素補間法をこの融合した空間に適用し、$1 < p < \infty$ のとき非可換 L^p 空間 $L^p_{(\alpha)}(\varphi)$ をその指数 $1/p$ の補間空間で定義する。$\mathcal{M}$ が可換のときはこれは通常の L^p 空間に一致する。

各非可換 L^p 空間は $\Sigma_{(\alpha)}$ のある部分空間に補間ノルムを入れたものでバナッハ空間である。また、包含関係

$$j^*_{(-\alpha)}(\mathfrak{a}_0^2) \subset j^*_{(-\alpha)}(L_{(\alpha)}) \subset L^p_{(\alpha)}(\varphi)$$

が成立し、$j^*_{(-\alpha)}(\mathfrak{a}_0^2)$ および $j^*_{(-\alpha)}(L_{(\alpha)})$ はそれぞれ $L^p_{(\alpha)}(\varphi)$ で norm dense である。

$\alpha = -1/2$ のとき L^p 空間には $\mathcal{M}$ が左から自然に作用する。作用は次のようにして定める。$x \in \mathcal{M}$ に対し linear map $\pi_p(x) : L^p_{(-1/2)}(\varphi) \to L^p_{(-1/2)}(\varphi)$ を

$$\pi_p(x)(j^*_{(1/2)}(y)+i^*_{(1/2)}(\psi)) = j^*_{(1/2)}(ay)+i^*_{(1/2)}(a\psi),\ y \in \mathcal{M},\ \psi \in \mathcal{M}_*$$

で定義するとこれは well-defined で、$\|\pi_p(x)\| = \|x\|$ である。しかも明らかに π_p は $\mathcal{M}$ の $L^p_{(-1/2)}(\varphi)$ への作用である。

$1 < p < \infty,\ 1/p + 1/q = 1$ に対して、bounded bilinear form $\langle\cdot,\cdot\rangle_{p,(\alpha)} : L^p_{(\alpha)}(\varphi) \times L^q_{(-\alpha)}(\varphi) \to \mathbb{C}$ が

$$\langle j^*_{(-\alpha)}(a), j^*_{(\alpha)}(b)\rangle = \varphi^{(\alpha)}_a(b) = \varphi^{(-\alpha)}_b(a),\ a \in L_{(\alpha)},\ b \in L_{(-\alpha)}$$

を満たすように構成できる。この bilinear form によって、$L^q_{(-\alpha)}(\varphi)$ は $L^p_{(\alpha)}(\varphi)$ の双対空間と見なすことができる。さら

に、sesquilinear form を用いた duality が次のようにして得られる。conjugate-linear map $J_{p,(\alpha)}:L^p_{(\alpha)}(\varphi)\to L^p_{(-\alpha)}(\varphi)$ を

$$J_{p,(\alpha)}(j^*_{(-\alpha)}(x)+i^*_{(-\alpha)}(\psi))=j^*_{(\alpha)}(x^*)+i^*_{(\alpha)}(\psi^*),\ x\in\mathcal{M},\ \psi\in\mathcal{M}_*$$

で定義すると、これは well-defined で bijective isometry になっている。そこで、sesquilinear form $(\cdot|\cdot)_{p,(\alpha)}:L^p_{(\alpha)}(\varphi)\times L^q_{(\alpha)}(\varphi)\to\mathbb{C}$ を

$$(\xi|\eta)_{p,(\alpha)}=\langle\xi,J_{q,(\alpha)}\eta\rangle_{p,(\alpha)},\ \xi\in L^p_{(\alpha)}(\varphi),\ \eta\in L^q_{(\alpha)}(\varphi)$$

で定義すると、明らかにこれは L^p 空間と L^q 空間の duality を与える。また、$p=2,\ \alpha=-1/2$ のときこの sesquilinear form は $L^2_{(-1/2)}(\varphi)$ 上の内積であり、$L^2_{(-1/2)}(\varphi)$ はヒルベルト空間になっており、しかも

$$(j^*_{(1/2)}(a)|j^*_{(1/2)}(b))_{2,(-1/2)}=(\Lambda_\varphi(a)|\Lambda_\varphi(b)),\ a,b\in\mathfrak{a}_0^2$$

をみたす。すなわち standard Hilbert space と同型であり、明らかに作用 π_2 は π_φ とユニタリ同値である。

実数 α,β に対して等距離同型写像

$$U_{p,(\beta,\alpha)}:L^p_{(\alpha)}(\varphi)\to L^p_{(\beta)}(\varphi)$$

が

$$U_{p,(\beta,\alpha)}j^*_{(-\alpha)}(a)=j^*_{(-\beta)}(\sigma^\varphi_{i(\beta-\alpha)/p}(a)),\ a\in\mathfrak{a}_0^2$$

を満たすように構成できる。この写像は上述の sesquilinear form を保存する：

$$(U_{p,(\beta,\alpha)}\xi|U_{q.(\beta,\alpha)}\eta)_{p,(\beta)}=(\xi|\eta)_{p,(\alpha)},\ \xi\in L^p_{(\alpha)}(\varphi),\ \eta\in L^q_{(\alpha)}(\varphi).$$

この同型写像を用いて任意の L^p 空間上に $\mathcal{M}$ の作用を定義する。$a\in\mathcal{M}$ に対して、

$$\pi_{p,(\alpha)}(a)=U_{p,(\alpha,-1/2)}\pi_p(a)U_{p,(-1/2.\alpha)}$$

と定義すると、$\pi_{p,(\alpha)}$ は $\mathcal{M}$ の $L^p_{(\alpha)}(\varphi)$ への作用である。すると、$\{\pi_{2,(\alpha)},\ L^2_{(\alpha)}(\varphi)\}$ も standard Hilbert space とユニタリ同値である。

同型写像 $I_{p,(\alpha)} : L^p_{(\alpha)}(\varphi) \to L^p_{(\alpha)}(\varphi)$ を

$$I_{p,(\alpha)} = J_{p,(-\alpha)} \circ U_{p,(-\alpha,\alpha)} = U_{p,(\alpha,-\alpha)} \circ J_{p,(\alpha)}$$

で定義すると、これは involution になる。また、$L^2_{(0)}(\varphi)$ の cone $P_{2,(0)}$ を

$$P_{2,(0)} = \overline{\{j^*_{(0)}(a^*a) \mid a \in \mathfrak{a}_0\}}$$

で定義すると、次が成立する。

定理 1. $\{\pi_{2,(0)}, L^2_{(0)}(\varphi), I_{2,(0)}, P_{2,(0)}\}$ はstandard form である。

さらに、$1 < p < \infty,\ p \neq 2$ に対して $L^p_{(0)}(\varphi)$ の cone $P_{p,(0)}$ を

$$P_{p,(0)} = \overline{L^p_{(0)}(\varphi) \cap P_{2,(0)}}$$

で定義する。また、一般の α に対しては、$L^p_{(\alpha)}(\varphi)$ の cone $P_{p,(\alpha)}$ を

$$P_{p,(\alpha)} = U_{p,(\alpha,0)} P_{p,(0)}$$

で定義する。すると、standard form に類似の、次の結果が成り立つ。

定理 2. $1 < p, q < \infty,\ 1/p + 1/q = 1,$ に対して次が成立する。

(1) $I_{p,(\alpha)} \pi_{p,(\alpha)}(\mathcal{M}) I_{p,(\alpha)} \subset \pi_{p.(\alpha)}(\mathcal{M})'$.
ここで右辺の $'$ は $\mathcal{B}(L^p_{(\alpha)}(\varphi))$ における commutant を表す。

(2) $I_{p,(\alpha)}\xi = \xi,\ \xi \in \mathcal{P}_{p,(\alpha)}$.

(3) $I_{p,(\alpha)}\pi_{p,(\alpha)}(a)I_{p,(\alpha)} = \pi_{p,(\alpha)}(a^*),\ a \in \mathcal{Z}(\mathcal{M})$.

(4) $\pi_{p,(\alpha)}(x)I_{p,(\alpha)}\pi_{p,(\alpha)}(x)I_{p,(\alpha)}\mathcal{P}_{p,(\alpha)} \subset \mathcal{P}_{p,(\alpha)},\ x \in \mathcal{M}$.

(5) $\mathcal{P}_{p,(\alpha)}$ と $\mathcal{P}_{q,(\alpha)}$ は sesquilinear form $(\cdot|\cdot)_{p,(\alpha)}$ に関して互いに dual な positive cone である。

この定理は $\alpha = 0$ のとき証明してしまえば、一般の α の場合は U-map の性質から自動的に出てくる。$\alpha = 0$ のときは定理１の standard form における positive cone の self-duality が本質的な役割を果たす。定理２（１）の式は $p = 2$ のときは等号が成り立つので、一般の p のときも等号が成り立つであろうと予想される。

参考文献

[1] H. Izumi, *Constructions of non-commutative L^p-spaces with a complex parameter arising from modular actions*, Int. J. Math. **8**(1997), 1029-1066.

[2] H. Izumi, *Natural bilinear forms, natural sesquilinear forms and the associated duality of non-commutative L^p-spaces*, Int. J. Math. **9**(1998), 975-1039